

# Elementi di Analisi Superiore per la Fisica e l'Ingegneria

Alberto FERRERO - Filippo GAZZOLA - Maurizio ZANOTTI

$$0.\bar{9} \geq 1 \quad \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi \cdot x} e^{-|x|^2} dx = \pi^{n/2} e^{-|\xi|^2/4}$$

$$\log z + \log z \neq 2 \log z \quad - \int_{\mathbb{R}^n} u \Delta \Phi = u(0)$$

$$e^{i\pi} = -1 \quad u_t - \eta \Delta u + (u \cdot \nabla)u + \nabla p = f$$

# Indice

<b>1</b>	<b>Spazi di Banach e di Hilbert</b>	<b>1</b>
1.1	Spazi vettoriali e norme . . . . .	1
1.2	Spazi di Banach . . . . .	5
1.3	Operatori lineari e spazi duali . . . . .	8
1.4	Spazi di Hilbert . . . . .	9
1.5	Proiezioni ortogonali in uno spazio di Hilbert . . . . .	14
1.6	Spazi separabili . . . . .	19
1.7	Teoremi di Stampacchia e Lax-Milgram . . . . .	23
1.8	Teoria spettrale per spazi di Hilbert reali . . . . .	25
<b>2</b>	<b>Integrale di Lebesgue e spazi <math>L^p</math></b>	<b>31</b>
2.1	Integrale di Riemann . . . . .	31
2.2	Misura di Lebesgue . . . . .	34
2.2.1	Insiemi aperti e chiusi . . . . .	34
2.2.2	Insiemi di tipo generale . . . . .	35
2.3	Integrale di Lebesgue . . . . .	37
2.3.1	Funzioni misurabili, funzioni integrabili . . . . .	37
2.3.2	Principali proprietà dell'integrale di Lebesgue . . . . .	39
2.4	Spazi $L^p$ . . . . .	41
2.5	Serie di Fourier . . . . .	48
2.6	Distribuzioni . . . . .	50
2.7	Vantaggi dell'integrale di Lebesgue . . . . .	58
<b>3</b>	<b>Soluzioni classiche di equazioni alle derivate parziali lineari</b>	<b>61</b>
3.1	Introduzione . . . . .	61
3.2	Equazione del trasporto . . . . .	64
3.2.1	Descrizione del modello fisico . . . . .	64
3.2.2	Risoluzione dell'equazione del trasporto . . . . .	65
3.3	Equazioni del prim'ordine più generali . . . . .	68
3.4	Equazione delle onde . . . . .	71
3.4.1	Equazione delle onde in dimensione $n = 1$ . . . . .	71

3.4.2	Equazione delle onde in dimensione $n = 3$ . . . . .	80
3.4.3	Equazione delle onde in dimensione $n = 2$ . . . . .	90
3.5	Equazione del calore . . . . .	95
3.5.1	Modelli di diffusione . . . . .	95
3.5.2	Equazione del calore in dimensione $n = 1$ . . . . .	97
3.5.3	Equazione del calore nel caso generale $n \geq 1$ . . . . .	101
3.6	Equazioni di Laplace e Poisson . . . . .	106
3.6.1	Unicità per i problemi di Dirichlet e Neumann . . . . .	106
3.6.2	Soluzione fondamentale dell'equazione di Laplace . . . . .	110
3.6.3	Separazione delle variabili . . . . .	112
3.6.4	Proprietà delle funzioni armoniche . . . . .	118
<b>4</b>	<b>Analisi complessa</b> . . . . .	<b>123</b>
4.1	Funzioni olomorfe . . . . .	123
4.2	Prolungamento di funzioni da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{C}$ . . . . .	125
4.3	Funzioni poldrome . . . . .	127
4.4	Curve in $\mathbb{C}$ . . . . .	131
4.5	Il Teorema dell'integrale nullo di Cauchy . . . . .	133
4.6	Conseguenze del Teorema di Cauchy . . . . .	136
4.7	Serie di Laurent . . . . .	139
4.8	Il Teorema dei residui . . . . .	142
4.9	Il Teorema dell'indicatore logaritmico . . . . .	145
4.10	Lemmi di Jordan . . . . .	147
4.11	Calcolo di integrali con la teoria dei residui . . . . .	150
<b>5</b>	<b>Trasformate integrali</b> . . . . .	<b>155</b>
5.1	La trasformata di Fourier . . . . .	155
5.2	Convoluzioni e antitrasformata di Fourier . . . . .	160
5.3	La trasformata di Fourier in $L^2(\mathbb{R}^n)$ e in $S'(\mathbb{R}^n)$ . . . . .	163
5.4	Trasformata di Fourier ed equazioni differenziali . . . . .	166
5.4.1	Applicazioni alle equazioni differenziali ordinarie . . . . .	166
5.4.2	Applicazioni alle equazioni alle derivate parziali . . . . .	171
5.5	La trasformata di Laplace . . . . .	178
5.6	Antitrasformata di Laplace . . . . .	186
5.7	Trasformata di Laplace ed equazioni differenziali . . . . .	187
5.7.1	Applicazioni alle equazioni differenziali ordinarie . . . . .	187
5.7.2	Applicazioni alle equazioni alle derivate parziali . . . . .	193
<b>6</b>	<b>Spazi di Sobolev Hilbertiani</b> . . . . .	<b>199</b>
6.1	Perchè studiare gli spazi di Sobolev? . . . . .	199
6.2	Spazi di Sobolev Hilbertiani del prim'ordine . . . . .	200
6.2.1	Spazi di Sobolev del prim'ordine in dimensione $n = 1$ . . . . .	200

6.2.2	Spazi di Sobolev del prim'ordine in dimensione $n \geq 2$ . . . . .	205
6.3	Gli spazi $H^k$ ( $k \in \mathbb{N}$ ) . . . . .	209
6.4	Gli spazi $H^s$ ( $s \geq 0$ ) . . . . .	212
6.5	Gli spazi $H_0^s$ e gli operatori di traccia . . . . .	213
6.6	Teoremi di immersione . . . . .	216
6.7	Gli spazi $H^s$ ( $s < 0$ ) . . . . .	218
6.8	Il metodo di Galerkin . . . . .	220
<b>7</b>	<b>Soluzioni deboli di equazioni alle derivate parziali lineari</b>	<b>225</b>
7.1	Formulazione variazionale di alcuni problemi ai limiti ellittici . . . . .	225
7.1.1	Problema di Dirichlet omogeneo . . . . .	225
7.1.2	Problema di Dirichlet non omogeneo . . . . .	228
7.1.3	Problema di Neumann . . . . .	230
7.1.4	Equazione di Stokes . . . . .	233
7.1.5	Regolarità delle soluzioni deboli . . . . .	238
7.2	Equazioni paraboliche . . . . .	239
7.2.1	Integrale di Bochner . . . . .	240
7.2.2	Equazioni astratte . . . . .	242
7.2.3	Equazione del calore . . . . .	246
7.2.4	Equazione di Stokes evolutiva . . . . .	248
7.3	Equazione delle onde . . . . .	249
<b>8</b>	<b>Alcune equazioni alle derivate parziali non lineari</b>	<b>255</b>
8.1	Equazioni di Navier-Stokes . . . . .	255
8.1.1	Descrizione del modello fisico . . . . .	255
8.1.2	Equazione stazionaria . . . . .	257
8.1.3	Equazione evolutiva . . . . .	265
8.2	Equazioni ellittiche semilineari . . . . .	267
8.2.1	Alcuni modelli fisici descritti da equazioni non lineari . . . . .	267
8.2.2	Soluzioni deboli e loro regolarità . . . . .	270
8.2.3	Il ruolo dell'esponente critico di Sobolev . . . . .	271
8.2.4	Altri esponenti critici . . . . .	277
	<b>Glossario dei pre-requisiti</b>	<b>281</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>283</b>
	<b>Indice Analitico</b>	<b>288</b>